

Exercices corps finis

Exercice 1.

Déterminer un élément primitif du corps fini $\mathbb{Z}_5[X]/\langle X^2 + 3 \rangle$.

Exercice 2.

1. Déterminer un élément primitif du corps fini $\mathbb{F}_3[X]/\langle X^3 + 2X + 1 \rangle$.
2. Représenter dans un tableau comparatif les éléments de $\mathbb{F}$ sous forme polynômial et sous forme multiplicative.

Exercice 3.

1. Vérifier que les polynômes $X^2 + X + 2$ et $X^2 + X + 2$ sont irréductibles sur $\mathbb{F}_3$.
2. Construire de deux façons le corps $\mathbb{F}_9$ et déterminer dans chaque cas un élément primitif.
3. Lequel des deux méthodes est la meilleure ? Justifier

Exercice 4.

On se propose de construire un corps à 16 éléments.

1. Vérifier que le polynôme $X^4 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.
2. Construire un corps $\mathbb{F}$ à 16 éléments comme extension de $\mathbb{F}_2$ et déterminer un élément primitif.
3. Représenter dans un tableau comparatif les éléments de $\mathbb{F}$ sous forme polynômial et sous forme multiplicative.
4. Soient $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^2 + X + 1 \rangle$ et $\alpha = X + \langle X^2 + X + 1 \rangle$.
 - (a) Vérifier que $X^2 + X + \alpha$ est irréductible sur $\mathbb{F}_4$.
 - (b) Construire un corps $\mathbb{G}$ à 16 éléments comme extension de $\mathbb{F}_4$ et déterminer un élément primitif.
 - (c) Écrire les éléments de $\mathbb{F}_4$ comme puissance de l'élément primitif de $\mathbb{G}$.

Exercice 5.

Factoriser sur $\mathbb{F}_2$ le polynôme $X^{15} - 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 6.

Déterminer les polynômes minimaux des éléments des corps suivants et préciser lesquels sont des polynômes primitifs.

1. $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[x]/(x^3 + 2x + 1)$
2. $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 3)$